Formule d'Euler-Maclaurin | Leçons : 224, 245, 228

Thm : Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et f $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ pour laquelle il existe $M \geq 1$ tel que $\forall m \geq M$ on ait

$\partial^m f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, alors $f(1) + \dots + f(n) = T_m(n) + C + R_m(n)$

où
$$\begin{cases} T_m(n) = \int_1^n f(x)\,dx + \frac{f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!} \partial^{k-1} f(n) \\ C = \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!} \partial^{k-1} f(1) + (-1)^{m+1} \int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x)\,dx \\ R_m(n) = (-1)^m \int_n^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x)\,dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli et les b_k les polynômes de Bernoulli définis sur $[0,1[$ et prolongés par 1-périodicité.

Preuve :

$\boxed{\text{Etape 1}}$ On calcule $\int_0^1 f(x)\,dx$

On définit une suite de polynômes tels que $\begin{cases} \partial p_n = p_{n-1} \\ p_0 = 1 \end{cases}$ on a alors

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x) p_0(x)\,dx = \left[f(x) p_1(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \partial f(x) p_1(x)\,dx$$
$$= \left[f(x) p_1(x)\right]_0^1 - \left[f(x) p_2(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \partial^2 f(x) p_2(x)\,dx$$
$$= \dots$$
$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \left[p_k(x) \partial^{k-1} f(x)\right]_0^1 + (-1)^m \int_0^1 p_m(x) \partial^m f(x)\,dx$$

On peut prendre $p_n(0) = p_n(1)$ $\forall n \geq 2$, ceci équivaut à $\int_0^1 p_n(x)\,dx = 0$

~~D'où $\int_0^1 f(x)\,dx$~~ Comme $\partial p_1 = p_0 = 1$ on a $p_1(x) = x + C_1$
et $\int_0^1 p_1(x)\,dx = \frac{1}{2} + C_1 = 0$ d'où $p_1(x) = x - \frac{1}{2}$

On construit tous les p_n de même et on a
$$\partial p_{n+1}(x) = p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow p_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C_{n+1}$$

On a bien donc l'existence et l'unicité de la famille (P_n) on définit alors les polynômes de Bernoulli, $P_n(x) = \frac{B_n(x)}{n!}$ et nombres de Bernoulli : $B_n = B_n(0)$.

On réécrit la formule pour trouver

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{k!} \left[\partial^{k-1} f\right]_0^1 + (-1)^m \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} \partial^m f(x)\, dx$$

$\boxed{\text{Etape 2 :}}$

On définit la fonction périodique sur $\mathbb{R}$, de période 1, égale à $B_k(x)$ sur $[0,1[$

càd $b_k(x) = B_k(x - \lfloor x \rfloor)$

On applique l'égalité précédente à la fonction $x \mapsto f(x+l)$, $\forall p \leq l < q$

$$\int_l^{l+1} f(x)dx = \frac{f(l)+f(l+1)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{k!} \left[\partial^{k-1} f\right]_l^{l+1} + (-1)^m \int_l^{l+1} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x)\, dx$$

On somme pour l allant de p à $q-1$ on a alors

$$\int_p^q f(x)dx = \frac{f(p)}{2} + f(p+1) + \dots + f(q-1) + \frac{f(q)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{k!} \left[\partial^{k-1} f\right]_p^q + (-1)^m \int_p^q \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x)\, dx$$

On réarrange les termes et on prend $p=1$ et $q=n$ d'où on a

$$f(1) + \dots + f(n) = \int_1^n f(x)dx + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!} \left[\partial^{k-1} f\right]_1^n + (-1)^{m+1} \int_1^n \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x)\, dx + \frac{f(1)+f(n)}{2}$$

La dernière intégrale de cette formule n'a aucune raison de converger vers 0 par nature or par hypothèse sur f on a $\exists M \geq 1, \forall m \geq M, \partial^m f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

On a alors que $\int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m (x)\, dx$ est convergente. On a ainsi

$$\begin{aligned} f(1) + \dots + f(n) = & \int_1^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!} \partial^{k-1} f(n) && = T_m(n) \\ & + \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!} \partial^{k-1} f(1) + (-1)^{m+1} \int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x)\, dx && = C_m \\ & + (-1)^m \int_n^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x)\, dx && = R_m(n) \end{aligned}$$

On a bien que la dernière intégrale converge vers 0 quand $n \to +\infty$ il ne reste plus qu'à montrer que C_m ne dépend ni de n ni de m.
En effet on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{b_m(x)\partial^m f(x)}{m!}\,dx$ d'où en intégrant par parties

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\,dx = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!}\partial^m f(x)\right]_k^{k+1}}_{\text{Série télescopique}} - \sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!}\partial^{m+1} f(x)\,dx$$

$$= -\frac{B_{m+1}}{(m+1)!}\partial^m f(1) - \int_1^{+\infty}\frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!}\partial^{m+1}f(x)\,dx$$

D'où

$$C_m = \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k B_k}{k!}\partial^{k-1}f(1) + (-1)^{m+1}\int_1^{+\infty}\frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\,dx$$

$$= \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k B_k}{k!}\partial^{k-1}f(1) + (-1)^{m+1}\left(-\frac{B_{m+1}}{(m+1)!}\partial^m f(1) - \int_1^{+\infty}\frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!}\partial^{m+1}f(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m+1}\frac{(-1)^k B_k}{k!}\partial^{k-1}f(1) + (-1)^{m+2}\int_1^{+\infty}\frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!}\partial^{m+1}f(x)\,dx$$

$$= C_{m+1}$$

D'où le résultat.

Calcul intégral, Candelpergher $\square$

$\boxed{\text{Complément}}$

- Si on prend $f(x) = 1/x^2$ on a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x^2}}_{1-\frac{1}{n}} + C + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} + O\left(\frac{1}{n^9}\right)$$

- C s'appelle la constante de Ramanujan et ne dépend que de f.
On peut utiliser cette formule quand $f(x)$ est de la forme $x^\alpha \log^\beta(x)$ ou f est un polynôme ou une fraction rationnelle, pas impossible pour e^x ou $\operatorname{sh}(x)$.

- Qlqs propriétés sur les nombres / polynômes de Bernoulli :
  - $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$ .....
  - Pour n impair ≥ 3, les B_n sont nuls
  - $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$
  - $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$

en effet on définit $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ sol° de la m̂ éq° de réc que B_n
car $C_n'(x) = n C_{n-1}(x)$ et $\int_0^1 C_n(x)dx = 0$ d'où $C_n = B_n$
$\Rightarrow B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$

et donc pour n impair, $n = 2p+1$ on a $B_{2p+1}(1-X) = -B_{2p+1}(X)$
$\Rightarrow B_{2p+1}(1) = -B_{2p+1}(0)$
or $B_{2p+1}(1) = B_{2p+1}(0)$ $\left(B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(x)dx = 0\right)$
D'où $b_{2p+1} = B_{2p+1}(0) = 0$

Par réc on mq $B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$ d'où par Taylor $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$

- Ça peut servir à donner un développement asymptotique de $n!$ en appliquant à série $\ln(1+x)$